Математичка гимназија у Београду
Додатна настава из математике
10.12.2005.

Инверзија

Миливоје Лукић
milivoje.lukic@gmail.com

Инверзија са центром O и полупречником r је пресликавање $\psi_{O,r} : \mathbb{E}^2 \backslash \{O\} \to \mathbb{E}^2 \backslash \{O\}$ које тачки $X \neq O$ придружује тачку X^* такву да: X^* припада полуправој OX, и $OX \cdot OX^* = r^2$.

Инверзија је инволуција, то јест $\psi_{O,r} \circ \psi_{O,r}$ је идентичко пресликавање.

Фиксне тачке при инверзији су тачке круга $k(O, r)$, док се тачке у унутрашњости круга сликају у тачке изван круга, а тачке из спољашњости у тачке у унутрашњости круга.

Нека су A^* и B^* слике тачака A и B при инверзији $\psi_{O,r}$. Пошто је $\angle AOB = \angle B^*OA^*$ и $\frac{OA}{OB} = \frac{OB^*}{OA^*}$, троуглови AOB и B^*OA^* су слични, дакле $A^*B^* = \frac{OA^*}{OB} \cdot AB$, односно

$$A^*B^* = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB = \frac{OA^* \cdot OB^*}{r^2} \cdot AB. \tag{1}$$

Из исте сличности добијамо и формулу

$$\angle OA^*B^* = \angle OBA. \tag{2}$$

Праве и кругови се при инверзији сликају у праве и кругове, и то: права се слика у праву ако и само ако садржи центар инверзије, иначе се слика у круг; круг се слика у праву ако и само ако садржи центар инверзије, иначе се слика у круг.

Напомена: Ако се круг k при инверзији ψ пресликава у круг k^*, то не значи да се његов центар при истој инверзији пресликава у центар круга k^*!

Круг l се при инверзији $\psi_{O,r}$ пресликава у себе ако и само ако је нормалан на круг $k(O, r)$ у односу на који се врши инверзија, или ако је $l = k(O, r)$.

Инверзија је конформно пресликавање - чува углове између правих или кругова (и општије, између било које две криве линије).

Ако се круг k при инверзији ψ са центром у O пресликава у круг k^*, онда постоји хомотетија са центром у O која пресликава круг k у круг k^*.

1. Дата су четири круга тако да сваки додирује тачно два дата круга. Доказати да се четири додирне тачке налазе на једној правој или кругу.

2. Дати су кругови k_1, k_2, k_3, k_4. Нека се k_1 и k_2 секу у A_1 и A_2, k_2 и k_3 у B_1 и B_2, k_3 и k_4 у C_1 и C_2, k_4 и k_1 у D_1 и D_2. Доказати да, ако тачке A_1, B_1, C_1, D_1 леже на једном кругу или правој, онда и тачке A_2, B_2, C_2, D_2 леже на једном кругу или правој.

3. Одредити геометријско место тачака додира парова кругова који додирују стране датог угла у датим тачкама A и B.

4. Два круга, Γ_1 и Γ_2, који се секу у тачки A, додирују круг (или праву) S_1 у тачкама B_1 и C_1,а круг (или праву) S_2 у тачкама B_2 и C_2, при чему је додир у B_2 и C_2 исти као у B_1 и C_1. Доказати да се кругови описани око троуглова AB_1C_1 и AB_2C_2 додирују.

5. Тачке A, B, C леже на једној правој, а тачка P не припада тој правој. Доказати да тачка P и центри кружница описаних око троуглова ABP, BCP и CAP леже на једној кружници.

6. Доказати да Ојлеров круг троугла ABC додирује уписани и приписане кругове овог троугла.

7. (Птоломејева неједнакост) Доказати да за произвољне тачке A, B, C, D у равни важи

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Доказати да једнакост важи ако и само ако тачке A, B, C, D све припадају истом кругу или правој, при чему пар тачака A, C дели пар B, D.

8. Нека је ABC троугао са полуобимом s. Одаберимо тачке D и E на правој AB за које је $CD = CE = s$. Доказати да круг описан око CDE додирује споља приписан круг код стране AB троугла ABC.

9. На дужи AC дата је тачка B и над дужима AB, AC, BC као пречницима конструисани су полукругови ω, ω_1, ω_2 са исте стране праве AB. Конструишимо низ кругова на следећи начин: круг k_1 додирује ω, ω_1, ω_2, а круг k_n, за $n \geq 2$, додирује кругове ω, ω_1, k_{n-1}. Ако је r_n полупречник круга k_n, а d_n растојање центра круга k_n од праве AB, доказати да за свако n важи

$$d_n = 2nr_n.$$

10. Дат је троугао ABC и у његовој унутрашњости тачка M таква да је

$$\angle AMC - \angle ABC = \angle AMB - \angle ACB.$$

Доказати да је $BM/MC = BA/AC$.

11. (ИМО1997.предлог) Нека је $A_1A_2A_3$ неједнакокраки троугао са центром уписаног круга у I. Нека је C_i, $i = 1, 2, 3$, мањи круг кроз I тангентан на A_iA_{i+1} и A_iA_{i+2} (сабирање индекса се врши по модулу 3). Нека је B_i, $i = 1, 2, 3$, друга тачка пресека C_{i+1} и C_{i+2}. Доказати да су центри описаних кругова троуглова A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I колинеарни.

12. У троуглу ABC који није једнакостраничан, уписани круг додирује BC, CA, AB у тачкама M, N, P. Доказати да су центри описаног и уписаног круга троугла ABC и ортоцентар троугла MNP колинеарни.

13. На дужи AB узета је тачка C. Над AB и AC су конструисани полукругови k, l са исте стране праве AB, и круг ω који додирује круг l у тачки T, круг k и нормалу повучену у C на AB. Доказати да је BT тангента на l.

Математичка гимназија у Београду
Додатна настава из математике
10.12.2005.

Инверзија - Решења

Миливоје Лукић

1. Означимо дате кругове са k_1, k_2, k_3, k_4, а њихове додирне тачке са $A = k_1 \cap k_2$, $B = k_2 \cap k_3$, $C = k_3 \cap k_4$, $D = k_4 \cap k_1$. Инверзијом са центром у A, кругови k_1 и k_2 се сликају у праве k_1^* и k_2^*. Пошто k_1 и k_2 немају другу пресечну тачку осим A, праве k_1^* и k_2^* су дисјунктне, односно паралелне. Кругови k_3^* и k_4^* се додирују у тачки C^*. Ако са S_3 и S_4 означимо центре кругова k_3^* и k_4^*, видимо да је $\angle D^*S_4^*C^* = \angle B^*S_3^*C^*$ и $D^*S_4^* = C^*S_4^*$, $B^*S_3^* = C^*S_3^*$, дакле троуглови $C^*D^*S_4^*$ и $C^*B^*S_3^*$ су слични, одакле лако закључујемо да су B^*, C^*, D^* колинеарне тачке, односно (поновном применом инверзије) A, B, C, D леже на истом кругу/правој, зависно од тога да ли тачка A^* припада правој на којој леже B^*, C^*, D^*. $\square$

2. Применимо инверзију са центром у A. Кругови k_1 и k_4 се сликају у праве k_1^* и k_4^*, које се секу у тачки $A_1^* = k_1^* \cap k_4^*$. Кругови k_2 и k_3 се сликају у кругове k_2^* и k_3^*. права k_1^* и круг k_2^* се секу у тачкама B^* и B_1^*, круг k_2^* и круг k_3^* у тачкама C^* и C_1^*, а круг k_3^* и права k_4^* у тачкама D^* и D_1^*. Тврђење задатка, исказано у инверзивној слици, гласи да су тачке B^*, C^*, D^* колинеарне ако и само ако су тачке A_1^*, B_1^*, C_1^*, D_1^* на истом кругу. Тачке B^*, C^*, D^* су колинеарне ако и само ако је $\angle B^*C^*C_1^* + \angle D^*C^*C_1^* = 180°$, а A_1^*, B_1^*, C_1^*, D_1^* су на истом кругу ако и само ако је $\angle A_1^*B_1^*C_1^* + \angle A_1^*D_1^*C_1^* = 180°$. Али $\angle B^*C^*C_1^* = 180° - \angle B^*B_1^*C_1^* = \angle A_1^*B_1^*C_1^*$, и аналогно $\angle D^*C^*C_1^* = \angle C_1^*D_1^*A_1^*$, па су горњи услови међусобно еквивалентни. $\square$

3. Тражено геометријско место тачака је унија два круга, $k(A, B, M)$ и $k(A, B, N)$, где су M и N тачке праве BS такве да $MS = NS = AS$, а S је теме угла.

   Доказ: Применом инверзије са центром у A, добијамо следећи задатак: Дате су три неколинеарне тачке A^*, B^* и S^*. Круг одређен тим трима тачкама означимо са b^*, а праву A^*S^* означимо са a^*. Одредити геометријско место тачака добијених у пресеку кругова l^* и правих k^*, ако је $k^* \parallel a^*$ и k^* је тангента круга l^*. Сада директно видимо да је ово геометријско место тачака унија правих B^*M^* и B^*N^*, где су M^* и N^* тачке круга b^* које се налазе на једнакој удаљености од A^* и S^*. $\square$

4. Применимо инверзију са центром у A: кругови Γ_1 и Γ_2 се пресликавају у праве Γ_1^* и Γ_2^* које се секу у тачки A_2^* (где је A_2 друга тачка пресека кругова Γ_1 и Γ_2). Пошто кругови S_1^*, S_2^* додирују праве Γ_1^*, Γ_2^*, и из услова датих о додирима кругова Γ_i и S_j, закључујемо да су кругови S_1^*, S_2^* уписани у исти угао одређен правама Γ_1^* и Γ_2^*. Зато су хомотетични у односу на A_2^*, па је и $B_1^*C_1^* \parallel B_2^*C_2^*$. Сада видимо да се кругови AB_1C_1 и AB_2C_2 додирују у тачки A, јер када би имали још једну пресечну тачку M, праве $B_1^*C_1^*$ и $B_2^*C_2^*$ би се секле у тачки M^*. $\square$

5. Нека су C_1, A_1, B_1 тачке дијаметрално супротне тачки P у круговима PAB, PBC, PCA. Хомотетијом са центром у P и коефицијентом 2 уочавамо да је довољно да докажемо да су тачке P, A_1, B_1, C_1 коцикличне. Инверзијом са центром у P, тачке A, B, C се пресликавају у тачке A^*, B^*, C^*, такве да су P, A^*, B^*, C^* коцикличне. Пошто је $\angle B^*A_1^*P = \angle A_1BP = 90°$, тачка A_1^* је подножје нормале из P на праву B^*C^*. Аналогно, тачке B_1^*, C_1^* су подножја нормала из P на праве C^*A^*, A^*B^*. Треба доказати да су A_1^*, B_1^*, C_1^* колинеарне. Али оне управо одређују Симсонову праву тачке P у односу на троугао $A^*B^*C^*$, јер P припада кругу описаном око троугла $A^*B^*C^*$! $\square$

6. Докажимо да Ојлеров круг додирује уписани круг k и приписани круг k_a приписан наспрам темена A. Означимо са A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB. Нека су B_2 и C_2 тачке симетричне тачкама B и C у односу на унутрашњу симетралу угла $\angle BAC$ (дакле, права B_2C_2 је друга заједничка унутрашња тангента кругова k и k_a), P и Q додирне тачке кругова k и k_a са дужи BC, а D и E пресечне тачке правих A_1B_1 и A_1C_1 са правом B_2C_2. Према великом задатку, A_1 је средиште дужи PQ, и $A_1P = A_1Q = |b-c|/2$. При инверзији са центром у A_1 и полупречником A_1P, кругови k и k_a ће се пресликати у себе. Ојлеров круг садржи тачку A_1 која је центар инверзије, па ће се пресликати у праву, и преостаје да докажемо да је та права заједничка тангента кругова k и k_a.

   Доказаћемо да се при наведеној инверзији тачке B_1 и C_1 пресликавају у D и E. Уочимо тачку K, средиште дужи CC_2. Тачка K припада правој A_1B_1, и $A_1K = BC_2/2 = |b-c|/2 = A_1P$. Затим, $A_1D : A_1K = BC_2 : BA = A_1K : A_1B_1$, то јест $A_1D \cdot A_1B_1 = A_1K^2 = A_1P^2$. Аналогно се доказује да је $A_1E \cdot A_1C_1 = A_1P^2$. $\square$

7. Применимо инверзију са центром у A. Помоћу формуле (1) Птоломејева неједнакост се трансформише у неједнакост

$$\frac{r^2}{AB^*} \cdot \frac{r^2}{AC^* \cdot AD^*} \cdot C^*D^* + \frac{r^2}{AD^*} \cdot \frac{r^2}{AB^* \cdot AC^*} \cdot B^*C^* \geq \frac{r^2}{AC^*} \cdot \frac{r^2}{AB^* \cdot AD^*} \cdot B^*D^*,$$

   односно, после сређивања, у

$$B^*C^* + C^*D^* \geq B^*D^*.$$

   Ово је неједнакост троугла, те преостаје само да размотримо случајеве једнакости. Једнакост важи ако и само ако су B^*, C^*, D^* колинеарне тачке такве да је C^* између B^* и D^*. Исказујући тај услов у терминима полазних тачака A, B, C, D, добијамо управо услов који је наведен у тврђењу задатка. $\square$

8. Инверзија $\psi_{C,s}$ оставља фиксираним тачке D и E, па је слика круга CDE права DE. Означимо са P и Q додирне тачке правих AC и BC са приписаним кругом k_C троугла ABC наспрам темена C. Према великом задатку, $CP = CQ = s$, па су и тачке P и Q фиксне, односно приписани круг наспрам темена C је ортогоналан на круг инверзије, па и он остаје непокретан. Остаје да се примети да права DE додирује круг k_C, па се и њихове слике у инверзији додирују, чиме је доказано тврђење задатка. $\square$

9. Применимо инверзију са центром у A: тачке B и C се пресликавају у B^* и C^*, полукругови ω и ω_1 се пресликавају у полуправе ω^* и ω_1^* нормалне на праву B^*C^*, а ω_2 се пресликава у полукруг ω_2^* над пречником B^*C^*. Кругови k_n^* додирују међусобно паралелне полуправе ω^* и ω_1^*, па су сви истог полупречника r^* једнаког полупречнику полукруга ω_2^*. Видимо и да је растојање центра круга d_n^* од праве B^*C^* једнако $d_n^* = 2nr^*$. Сада применимо тврђење наведено у теоријском уводу, по коме постоји хомотетија са центром у A која пресликава круг k_n^* у круг k_n. Ако је коефицијент те хомотетије κ, онда је $d_n = \kappa d_n^*$ и $r_n = \kappa r^*$, па је $d_n/r_n = d_n^*/r^* = 2n$, што је требало доказати. $\square$

10. Инверзијом са центром у A, тачке B, C и M се пресликавају у тачке B^*, C^* и M^*. Помоћу формуле (2), услов задатка трансформишемо у $\angle AC^*M^* - \angle AC^*B^* = \angle AB^*M^* - \angle AB^*C^*$, односно $\angle M^*C^*B^* = \angle M^*B^*C^*$. Дакле, троугао $B^*C^*M^*$ је једнакокраки, и $B^*M^* = C^*M^*$. Сада, изједначавањем формула (1) за дужи B^*M^* и C^*M^*, добијамо

$$\frac{r^2}{AB \cdot AM} \cdot BM = \frac{r^2}{AC \cdot AM} \cdot CM,$$

   односно $BM/AB = CM/AC$, што је требало доказати. $\square$

11. Применимо инверзију са центром у I. Остављамо читаоцу да конструише инверзивну слику. Приметимо само да се услов да је I центар уписаног круга трансформише у услов да су кругови $A_i^* A_{i+1}^* I$ истих полупречника. (Зашто? Уколико је растојање тачке I од праве XY једнако r, а полупречник инверзије је R, онда је пречник круга IX^*Y^* једнак R^2/r) Сада искористимо следеће једноставно тврђење, које читалац може сам доказати: "Ако су k_1, k_2, k_3 три круга који садрже исту тачку I, такви да се никоја два од њих не додирују, онда су њихови центри колинеарни ако и само ако постоји још једна заједничка тачка $J \neq I$ пресека ова три круга." У инверзивној слици, ово значи да је наш задатак да докажемо да се праве $A_1^* B_1^*$, $A_2^* B_2^*$, $A_3^* B_3^*$ секу у једној тачки.

    Да би ово важило, довољно је да троуглови $A_1^* A_2^* A_3^*$ и $B_1^* B_2^* B_3^*$ буду хомотетични, то јест да њихове одговарајуће странице буду паралелне. Означимо са P_i^* центар круга $A_{i+1}^* A_{i+2}^* I$, а са Q_i^* подножје нормале из I на страницу $P_{i+1}^* P_{i+2}^*$. Лако се доказује да

$$\overrightarrow{A_1^* A_2^*} = 2\overrightarrow{Q_1^* Q_2^*} = -\overrightarrow{P_1^* P_2^*}.$$

    Такође, пошто су кругови $A_i^* A_{i+1}^* I$ истих полупречника, $P_1^* P_2^* \| B_1^* B_2^*$, па и $A_1^* A_2^* \| B_1^* B_2^*$. $\square$

12. Применимо инверзију у односу на уписани круг k троугла ABC. Тачке M, N, P су непокретне при овој инверзији. Тачке A^*, B^*, C^* су средишта дужи NP, PM, MN. Зато се описани круг l троугла ABC пресликава у l^*, Ојлеров круг троугла MNP. Означимо центар уписаног круга троугла ABC са I, центар круга l са O, центар круга l^* са S, а ортоцентар троугла MNP са H. Иако се центар O круга l при инверзији не пресликава у центар S круга l^*, ипак знамо да права OS пролази кроз тачку I, центар инверзије. Дакле, $O \in SI$. Посматрајмо сада троугао MNP: у њему је H ортоцентар, I центар описаног круга, а S центар Ојлеровог круга, па H, I, S леже на Ојлеровој правој троугла MNP, односно $H \in SI$. Из до сада доказаног следи да су тачке O, I, H колинеарне, што је требало доказати. $\square$

13. Применимо инверзију са центром у A. Полукругови k и l се пресликавају у полуправе k^*, l^* нормалне на праву B^*C^*. Нормала m кроз C на праву AB се пресликава у круг m^* над пречником AC, а права BT у круг AB^*T^*. Тврђење задатка, исказано у инверзивној слици, гласи: полуправа l^* је тангента круга AB^*T^*.

    Тај услов је испуњен ако и само ако је $C^*T^{*2} = C^*B^* \cdot C^*A^*$ (овај услов смо добили израчунавањем потенције тачке C^* у односу на круг AB^*T^*). Ако означимо полупречник круга m^* са R, а полупречник круга ω^* са r, директно израчунавамо $C^*A^* = 2R$, $C^*B^* = 2r$. Да бисмо израчунали дужину C^*T^*, обележимо центар круга m^* са U, центар круга ω^* са V, и подножје нормале из V на B^*C^* са W. У правоуглом троуглу UVW је $UV = R + r$ и $UW = SC^* - UC^* = R - r$. Зато је

$$C^*T^{*2} = UV^2 - UW^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr = C^*A^* \cdot C^*B^*. \square$$